Beziehungen

zwischen der Invariantentheorie

und

der Theorie algebraischer Integrale und ihrer Umkehrungen.

Inaugural-Dissertation

behufs

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen philosophischen Facultät der Universität München

vorgelegt von

Heinrich Burkhardt.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub

1887.

Beziehungen

zwischen der Invariantentheorie

und

der Theorie algebraischer Integrale und ihrer Umkehrungen.

Inaugural-Dissertation

behufs

Erlangung der Doctorwürde

der

Hohen philosophischen Facultät der Universität München

vorgelegt von

Heinrich Burkhardt.

MÜNCHEN

Akademische Buchdruckerei von F. Straub

1887.

Die vorliegende Untersuchung hatte ihren Ausgangspunkt von einer näheren Discussion der Beziehungen zwischen der Invariantentheorie der biquadratischen binären Formen und den Weierstrass'schen elliptischen Functionen genommen. Der Umstand, dass dabei die Leitglieder der wichtigsten Covarianten als Coefficienten einer Reihenentwicklung auftraten, veranlasste die Frage, ob man nicht auch die Covarianten selbst als solche Entwicklungscoefficienten erhalten könne, und nachdem dies gelungen war, die weitere, ob gleiches nicht auch für Formen anderer Ordnungen möglich sei. Es zeigte sich, dass dabei diejenigen Integrale zu untersuchen waren, welche die Abbildung von geradlinigen Polygonen mit lauter gleichen Winkeln auf den Kreis vermitteln. (vgl. Schwarz, einige Abbildungsaufgaben, Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 70). Diese Integrale besitzen für sich allein betrachtet, der zugehörigen binären Form gegenüber Covariantencharakter; dadurch unterscheiden sie sich von den von Herrn Klein (Math. Ann. Bd. 27 p. 431 ff.) untersuchten Integralen, bei welchen eine Gruppe von je zweien (bezw. je p) covariant ist (vgl. daselbst Glchg. 16).

Die wesentlichen Resultate der Arbeit lagen bereits Juli 1886 der k. bayr. Prüfungscommission vor.

Dem Verfasser ist es eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle Herrn Professor Voss seinen besten Dank für die mannigfache Anregung und Förderung auszusprechen, welche diese Arbeit bei ihm gefunden hat.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548316_0127

§ 1.

Die Reduction des allgemeinen elliptischen Integrals I. Art auf die Weierstrass'sche Normalform.

Sei $$R(\xi) = a_0 \xi^4 + 4a_1 \xi^3 + 6a_2 \xi^2 + 4a_3 \xi + a_4$$

so wird durch das Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

x definirt als eindeutige doppelt periodische Funktion von u, welche in jedem Periodenparallelogramm jeden Wert zweimal annimmt (unter der Voraussetzung, dass die Discriminante der biquadratischen Form R von Null verschieden sei.)

Sind nun u_1, u_2 zwei nicht nur um eine ganze Periode verschiedene Werte des Integrals für $x = \infty$, so folgt:[1])

1) $$x = A\left\{\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)}\right\} + B,$$

wo die eingeführten Constanten A, B, sowie die Invarianten g_2, g_3 der elliptischen Functionen in noch zu bestimmender Weise von den Coefficienten von R und von der unteren Grenze des Integrals abhängen.

Zur Bestimmung von B erhält man, da für $u = 0$ $x = x_0$ werden soll, die Gleichung:

$$x_0 = A\left\{-\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2}\right\} + B$$

Damit lässt sich Gleichung 1 folgendermassen umformen:[2])

$$x - x_0 = A\left\{\left(\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right) - \left(\frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2}\right)\right\}$$

$$= \frac{A}{2}\left\{\frac{\mathfrak{p}' u + \mathfrak{p}' u_1}{\mathfrak{p} u - \mathfrak{p} u_1} - \frac{\mathfrak{p}' u + \mathfrak{p}' u_2}{\mathfrak{p} u - \mathfrak{p} u_2}\right\}$$

---

1) Weierstrass-Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen, art. 16, 3.

2) ebenda art. 11, 4.

2)
$$= -\frac{A}{2}\frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{p}u & \mathfrak{p}'u \\ 1 & \mathfrak{p}(-u_1) & \mathfrak{p}'(-u_1) \\ 1 & \mathfrak{p}(-u_2) & \mathfrak{p}'(-u_2) \end{vmatrix}}{(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_1)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_2)}$$

Nun ist die Determinante des Zählers:[1])

$$= 2\,\frac{\sigma(u - u_1 - u_2)\,\sigma(u + u_1)\,\sigma(u + u_2)\,\sigma(-u_1 + u_2)}{\sigma^3 u\,\sigma^3 u_1\,\sigma^3 u_2}$$

der Nenner aber:[2])

$$= \frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u + u_2)\,\sigma(u - u_1)\,\sigma(u - u_2)}{\sigma^4 u\,\sigma^2 u_1\,\sigma^2 u_2};$$

damit geht der Ausdruck für $x - x_0$ über in:

3)
$$x - x_0 = A\,\frac{\sigma(u_2 - u_1)}{\sigma u_1\ \sigma u_2}\,\frac{\sigma u\,\sigma(u - u_1 - u_2)}{\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2)}$$

Zur Bestimmung von A werde benutzt, dass wegen $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$

$$\lim_{x = \infty} \frac{1}{(x - x_0)^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{a_0}.$$

Bildet man nämlich aus 1)

4)
$$\frac{dx}{du} = A\Big\{-\mathfrak{p}(u - u_1) + \mathfrak{p}(u - u_2)\Big\} = A\,\frac{\sigma(u_2 - u_1)\,\sigma(2u - u_1 - u_2)^3)}{\sigma^2(u - u_1)\,\sigma^2(u - u_2)}$$

so erhält man:

5)
$$\frac{1}{(x - x_0)^2}\frac{dx}{du} = \frac{1}{A}\,\frac{\sigma^2 u_1\,\sigma^2 u_2}{\sigma(u_2 - u_1)}\,\frac{\sigma(2u - u_1 - u_2)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(u - u_1 - u_2)}$$

und wenn man zur Grenze $x = \infty$, d. h. $u = u_1$ oder $= u_2$ übergeht:

$$\sqrt{a_0} = \mp\frac{1}{A},\quad A = \pm\frac{1}{\sqrt{a_0}}$$

wo das der Wurzel beizulegende Zeichen davon abhängt, welchen der beiden Werte des ins Unendliche erstreckten Integrals man mit u_1, welchen mit u_2 bezeichnet.

Hier möge gleich noch die aus 3) und 4) hervorgehende Formel eine Stelle finden:

6)
$$\frac{\frac{dx}{du}\left(\frac{dx}{du}\right)_{u = o}}{(x - x_0)^2} = -\frac{\sigma(u_1 + u_2)\,\sigma(2u - u_1 - u_2)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(u - u_1 - u_2)}$$
$$= \mathfrak{p}u - \mathfrak{p}(u - u_1 - u_2);^3)$$

von derselben wird im folgenden Gebrauch gemacht werden.

1) l. c. 14, 3. 2) l. c. 11, 1. 3) l. c. 9, 1.

Um nun auch die elliptischen Functionen von u_1 und u_2 durch x_0 und die Coefficienten von R auszudrücken und so die Beziehung zwischen x und pu in algebraischer Form zu erhalten, bilde man zunächst die Ableitungen von R(x), immer mit Hilfe der Formel:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{du} : \frac{du}{dx}$$

Man erhält successive:

$$R(x) = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{1}{a_0}\left\{ - \mathfrak{p}(u-u_1) + \mathfrak{p}(u-u_2)\right\}^2;$$

$$R'(x) = \frac{2}{\sqrt{a_0}}\left\{ - \mathfrak{p}'(u-u_1) + \mathfrak{p}'(u-u_2)\right\};$$

7) $$R''(x) = 2\cdot\frac{-\mathfrak{p}''(u-u_1)+\mathfrak{p}''(u-u_2)}{-\mathfrak{p}(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_2)} = 12\left\{\mathfrak{p}(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_2)\right\};$$

$$R'''(x) = 12\sqrt{a_0}\,\frac{\mathfrak{p}'(u-u_1)+\mathfrak{p}'(u-u_2)}{-\mathfrak{p}(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_2)}$$

$$= 24\sqrt{a_0}\left\{\frac{\sigma'(u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_2)} + \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)}\right\}^{1});$$

$$R^{IV}(x) = 24\,a_0.$$

Diese Gleichungen ergeben für $u = 0$:

$$R(x_0) = \frac{1}{a_0}\left\{ - \mathfrak{p}u_1 + \mathfrak{p}u_2\right\}^2;$$

$$R'(x_0) = \frac{2}{\sqrt{a_0}}\left\{\mathfrak{p}'u_1 - \mathfrak{p}'u_2\right\};$$

8) $$R''(x_0) = 12\left\{\mathfrak{p}u_1 + \mathfrak{p}u_2\right\};$$

$$R'''(x_0) = 12\sqrt{a_0}\,\frac{\mathfrak{p}'u_1 - \mathfrak{p}'u_2}{\mathfrak{p}u_1 - \mathfrak{p}u_2};$$

$$R^{IV}(x_0) = 24\,a_0.$$

Zur Bildung von $x - x_0$ bedarf man noch der Ausdrücke:

$$\mathfrak{p}u_1\mathfrak{p}'u_2 - \mathfrak{p}'u_1\mathfrak{p}u_2 = \frac{1}{2}\left\{(\mathfrak{p}u_1-\mathfrak{p}u_2)(\mathfrak{p}'u_1+\mathfrak{p}'u_2) - (\mathfrak{p}u_1+\mathfrak{p}u_2)(\mathfrak{p}'u_1-\mathfrak{p}'u_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{a_0\cdot R(x_0)\cdot\frac{R'''(x_0)}{12\sqrt{a_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{a_0}\cdot R'(x_0)\cdot\frac{R''(x_0)}{12}\right\}$$

---

1) l. c. 11, 5.

10) $$= \frac{\sqrt{a_0}}{48}\left\{2\,R(x_0)\cdot R'''(x_0) - R'(x_0)\,R''(x_0)\right\}$$

und (für $\mathfrak{p}u = s$; $\mathfrak{p}'u = -\sqrt{S}$):

$$(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_1)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_2) = \left\{\mathfrak{p}u - \frac{1}{2}(\mathfrak{p}u_1 + \mathfrak{p}u_2)\right\}^2 - \frac{1}{4}(\mathfrak{p}u_1 - \mathfrak{p}u_2)^2$$

11) $$= \left\{s - \frac{1}{24}R''(x_0)\right\}^2 - \frac{1}{4}a_0 \cdot R'(x_0).$$

Setzt man diese Ausdrücke ein in die oben aufgestellte Formel 2), so erhält man die *Transformationsformel des Herrn Weierstrass:* [1])

$$x - x_0 = \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\mathfrak{p}'u(\mathfrak{p}u_1 - \mathfrak{p}u_2) + \mathfrak{p}u(\mathfrak{p}'u_1 - \mathfrak{p}'u_2) + (\mathfrak{p}u_1\mathfrak{p}'u_2 - \mathfrak{p}'u_1\mathfrak{p}'u_2)}{(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_1)(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}u_2)}$$

12) $$= \frac{\sqrt{S}\sqrt{R(x_0)} + \frac{1}{2}R'(x_0)\cdot\left\{s - \frac{1}{24}R''(x_0)\right\} + \frac{1}{24}R(x_0)\,R'''(x_0)}{2\left\{s - \frac{1}{24}R''(x_0)\right\}^2 - \frac{1}{4}a_0 \cdot R'(x_0)}$$

Die Ableitung der umgekehrten Formel scheint, wenn man die zunächst rein algebraische Aufgabe mit Hilfe der elliptischen Functionen lösen will, am einfachsten durch folgende Ueberlegungen geschehen zu können. Die elliptische Function II. Grades $x - x_0$ behält ihren Wert auch dem Zeichen nach, wenn u in $u_1 + u_2 - u$ verwandelt wird; $\frac{dx}{du}$ dagegen wechselt bei dieser Vertauschung sein Zeichen. Die Function $\mathfrak{p}u$ aber geht dabei über in $\mathfrak{p}(u - u_1 - u_2)$. Es ist also die Summe $\mathfrak{p}u + \mathfrak{p}(u - u_1 - u_2)$ eine rationale — und zwar wie leicht zu sehen eine ganze — Function von $x - x_0$, deren Coefficienten man etwa durch beiderseitige Entwicklung für die Umgebung von $u = 0$ bestimmt; die Differenz $\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}(u - u_1 - u_2)$ dagegen ist, wie bereits unter 6) gefunden, das Produkt einer solchen Funktion in $\frac{dx}{du}$. So erhält man die inverse Transformationsformel: [2])

13) $$s = \frac{R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{1\,2}R''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + \sqrt{R(x_0)}\cdot\sqrt{R(x)}}{2(x - x_0)^2}$$

1) Biermann, problemata quaedam mechanica, Diss. inaug. Berol. 1865, § 1, 6.

2) l. c. 3.

oder in symbolischer Schreibweise (für $x = \frac{x_1}{x_2}$, $x_0 = \frac{y_1}{y_2}$, $R(x) = a_x^4$):[1])

$$s = \frac{a_x^2 a_y^2 + \sqrt{a_x^4} \cdot \sqrt{a_y^4}}{2(xy)^2}.$$

§ 2.

Die Covarianten der biquadratischen Form, ausgedrückt als elliptische Functionen des zugehörigen Integrals I. Art.

Aus den § 1, 7 gegebenen Werten der Ableitungen von R(x) lassen sich die Covarianten und Invarianten dieser biquadratischen Form sofort zusammenstellen. Am einfachsten ist die Hesse'sche Form zu erhalten; es ist[2]):

$$\frac{H(x)}{R(x)} = \frac{1}{6} R''(x) - \frac{1}{8} \frac{R'^2(x)}{R(x)} \tag{14}$$

$$= -2\left\{-\wp(u-u_1) - \wp(u-u_2) + \frac{1}{4}\left(\frac{-\wp'(u-u_1) + \wp'(u-u_2)}{-\wp(u-u_1) + \wp(u-u_2)}\right)^2\right\}$$

$$= -2\wp(2u-u_1-u_2)\ ^3)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$\sqrt{R(x)} \cdot \frac{d}{dx} \frac{H(x)}{R(x)} = -4\wp'(2u-u_1-u_2)$$

d. i.

$$\frac{T(x)}{\{R(x)\}^{3/2}} = \wp'(2u-u_1-u_2). \tag{15}$$

Bei der Aufstellung der Invarianten sind die Formeln zu benutzen:

$$R'(x) \cdot R'''(x) = 24 \frac{-\wp'^2(u-u_1) + \wp'^2(u-u_2)}{-\wp(u-u_1) + \wp(u-u_2)}$$

$$= 96(\wp^2(u-u_1) + \wp(u-u_1)\wp(u-u_2) + \wp^2(u-u_2)) - 24 g_2;$$

$$R(x) \cdot R^{IV}(x) - \tfrac{1}{6} R''^2(x)$$

$$= 24\{(-\wp(u-u_1) + \wp(u-u_2))^2 - (\wp(u-u_1) + \wp(u-u_2))^2\}$$

$$= -96\wp(u-u_1) \cdot \wp(u-u_2)$$

---

1) Klein, l. c. 54.

2) Die Zahlenfaktoren sind im Folgenden immer so gewählt wie bei Clebsch, binäre Formen, § 40 ff.

3) Weierstrass-Schwarz, l. c. 12, 5.

$$\tfrac{1}{2}\,R'^{2}(x)\cdot R^{IV}(x)+\tfrac{1}{3}\,R(x)\cdot R'''^{2}(x)$$
$$=48\left\{(-\mathfrak{p}'(u-u_1)+\mathfrak{p}'(u-u_2))^2+(\mathfrak{p}'(u-u_1)+\mathfrak{p}'(u-u_2))^2\right\}$$
$$=96\left\{\mathfrak{p}'^{2}(u-u_1)+\mathfrak{p}'^{2}(u-u_2)\,.\right\}$$

So erhält man:

$$i=\tfrac{1}{12}\left\{R\,R^{IV}-R'R'''+\tfrac{1}{2}\,R''^{2}\right\}$$
$$=2\left\{\mathfrak{p}(u-u_1)-\mathfrak{p}(u-u_2)\right\}^2-8\left\{\mathfrak{p}^2(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_1)\mathfrak{p}(u-u_2)+\mathfrak{p}^2(u-u_2)\right\}$$
$$+2g_2+6\left\{\mathfrak{p}(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_2)\right\}^2$$
16) $$=2g_2\,;$$

$$j=\tfrac{1}{48}\,R''\left\{R\,R^{IV}-\tfrac{1}{6}\,R''^{2}+\tfrac{1}{2}\,R\,R'''\right\}-\tfrac{1}{32}\left\{\tfrac{1}{2}\,R'^{2}R^{IV}+\tfrac{1}{3}\,R\,R'''^{2}\right\}$$
17) $$=\tfrac{1}{4}\left\{\mathfrak{p}(u-u_1)+\mathfrak{p}(u-u_2)\right\}$$
$$\left\{48\,\mathfrak{p}^2(u-u_1)-48\,\mathfrak{p}(u-u_1)\,\mathfrak{p}(u-u_2)+48\,\mathfrak{p}^2(u-u_2)-12g_2\right\}$$
$$-3\left\{\mathfrak{p}'^{2}(u-u_1)+\mathfrak{p}'^{2}(u-u_2)\right\}=6g_3$$

Mit Hilfe der aufgestellten Ausdrücke der fundamentalen Invarianten und Covarianten liesse sich nun entweder die Theorie des Formensystems der biquadratischen Form ableiten aus den Relationen, welche die Weierstrass'schen elliptischen Functionen verbinden, oder umgekehrt letztere Relationen aus der Theorie jenes Formensystems. Hier soll das erstere wenigstens teilweise geschehen; sobald höhere als erste Ueberschiebungen in Betracht kommen, werden die Rechnungen (wie schon 16) und 17) zeigen) sehr unübersichtlich.

Zunächst fällt in die Augen, dass die Differentialgleichung der Function $\mathfrak{p}(2u-u_1-u_2)$:

$$\mathfrak{p}'^{2}(2u-u_1-u_2)=4\,\mathfrak{p}^3(2u-u_1-u_2)-g_2\,\mathfrak{p}(2u-u_1-u_2)-g_3$$

sich in Uebereinstimmung befindet mit der „syzygetischen" Relation zwischen den fundamentalen Invarianten und Covarianten der biquadratischen Form:

$$T^2=-\frac{1}{2}H^3+\frac{1}{4}\,i\,Hf^2-\frac{j}{6}f^3$$

Hieraus folgt für das Integral 1) der Wert:

18) $$u=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{1}{2}\int_{\infty}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3-\frac{1}{2}\,i\,\zeta-\frac{j}{6}}}\,,\qquad z=-\frac{1}{2}\,\frac{H(x)}{f(x)}$$

die Hermite'sche Transformation des allgemeinen elliptischen Integrals I. Art auf die Normalform[1]).

Ohne Schwierigkeit können auch noch die ersten Überschiebungen (Functionaldeterminanten) von T mit f[2]) und mit H auf dem hier eingeschlagenen Wege gebildet werden[3]):

$$19)\quad \frac{(f,T)}{f} = -\frac{1}{6} f^{-\frac{1}{2}} \frac{d\frac{T}{f^{3/2}}}{dx} = -\tfrac{1}{3}\mathfrak{p}''(2u-u_1-u_2)$$

$$= -2\mathfrak{p}^2(2u-u_1-u_2) + \tfrac{1}{6} g_2 = -\tfrac{1}{2}\frac{H^2}{f^2} + \frac{i}{12};$$

$$20)\quad \frac{(H,T)}{f^2} = \frac{1}{f}\left\{\tfrac{1}{4} T \frac{d\frac{H}{f}}{dx} - \tfrac{1}{6} H f^{\frac{1}{2}} \frac{d\frac{T}{f^{3/2}}}{dx}\right\}$$

$$= -\mathfrak{p}'^2(2u-u_1-u_2) + \tfrac{2}{3}\mathfrak{p}(2u-u_1-u_2)\mathfrak{p}''(2u-u_1-u_2)$$

$$= \tfrac{2}{3} g_2 \mathfrak{p}(2u-u_1-u_2) + g_3 = -\frac{i}{6}\frac{H}{f} + \frac{j}{6}.$$

Die Theorie der quadratischen Faktoren von T entspricht der Theorie der *Sigmafunctionen mit Index.* Die Function T zerfällt nämlich vermöge der Gleichung[4]):

$$\mathfrak{p}'(2u-u_1-u_2) =$$

$$-2\frac{\sigma_1(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)}\quad\frac{\sigma_2(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)}\quad\frac{\sigma_3(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)}$$

in 3 Faktoren:

$$T = 2\cdot\varphi\cdot\psi\cdot\chi\cdot$$

dabei ist:

$$21)\quad \frac{\varphi}{\sqrt{f}} = -\frac{\sigma_1(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)};$$

$$\frac{\psi}{\sqrt{f}} = -\frac{\sigma_2(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)};$$

$$\frac{\chi}{\sqrt{f}} = -\frac{\sigma_3(2u-u_1-u_2)}{\sigma(2u-u_1-u_2)}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen wechseln bei Vertauschung von u mit u_1+u_2-u ebenso wie $\sqrt{f(x)}$ das Zeichen, während x

1) Clebsch, a. a. O § 62, nr. 3.
2) wie im folgenden statt R geschrieben werden soll.
3) ib. § 42, 2.
4) Weierstrass-Schwarz, art. 18, 3.

bei dieser Vertauschung ungeändert bleibt. Daraus ist zu schliessen, dass φ, ψ, χ rationale, und da sie nur an denselben Stellen wie x selbst unendlich gross werden, ganze Functionen von x sind. Sie sind aber irrationale Functionen der Coefficienten a, insofern sie nicht nur von dem Perioden s y s t e m der eingeführten elliptischen Functionen, sondern von der Auswahl des zu Grunde gelegten primitiven Periodenpaares abhängen.

Die Gleichungen, welche die Sigmaquotienten durch $\mathfrak{p}$ ausdrücken [1]):

$$\mathfrak{p}(2u-u_1-u_2)-e_i=\frac{\sigma_i^{\,2}(2u-u_1-u_2)}{\sigma^2(2u-u_1-u_2)}\quad,\ i=1,2,3.$$

liefern die Beziehungen [2])

$$H+mf=-2\varphi^2,\quad H+m'f=-2\psi^2,\quad H+m''f=-2\chi^2;$$

durch Elimination von $\mathfrak{p}$, beziehungsweise von H entstehen einerseits die *Gleichungen zwischen je zwei Sigmaquotienten* [3]):

$$\frac{\sigma_1^{\,2}v}{\sigma^2 v}-\frac{\sigma_2^{\,2}v}{\sigma^2 v}=e_2-e_1;\quad \frac{\sigma_2^{\,2}v}{\sigma^2 v}-\frac{\sigma_3^{\,2}v}{\sigma^2 v}=e_3-e_2;$$

$$\frac{\sigma_3^{\,2}v}{\sigma^2 v}-\frac{\sigma_1^{\,2}v}{\sigma^2 v}=e_1-e_3;$$

andererseits die *3 Zerlegungen von f in je 2 quadratische Faktoren* [4])

$$f=\frac{2}{m-m}(\psi+\varphi)(\psi-\varphi)=\frac{2}{m'-m''}(\chi+\psi)(\chi-\psi)$$

$$=\frac{2}{m''-m}(\varphi+\chi)(\varphi-\chi).$$

Auch die Formeln für die *logarithmischen Ableitungen der Sigmaquotienten* [5]) gestatten eine direkte Überführung in Covariantenrelationen. Aus:

$$\frac{d}{du}\log\frac{\sigma_3(2u-u_1-u_2)}{\sigma_2(2u-u_1-u_2)}=-2(e_3-e_2)\frac{\sigma_1(2u-u_1-u_2)\sigma(2u-u_1-u_2)}{\sigma_2(2u-u_1-u_2)\sigma_3(2u-u_1-u_2)}$$

geht nämlich durch Multiplication mit $\frac{du}{dx}=\sqrt{f(x)}$ hervor:

$$\frac{d}{dx}\log\frac{\chi}{\psi}=(m''-m')\frac{\varphi}{\chi\psi}.$$

1) Weierstrass-Schwarz, art. 18,2.

2) Clebsch, § 44, 4. Die Clebsch'schen m sind doppelt so gross, als die Weierstrass'schen e.

3) Weierstrass-Schwarz, art. 24.

4) Clebsch § 47, 3.

5) Weierstrass-Schwarz, art. 25, 8. 9.

oder [1])

$$\psi \frac{d\chi}{dx} - \chi \frac{d\psi}{dx} = (m'' - m')\varphi$$

die Formel für die Functionaldeterminante je zweier der drei Functionen. Ebenso folgt aus:

$$\frac{d}{du} \log \frac{\sigma_1(2u - u_1 - u_2)}{\sigma(2u - u_1 - u_2)} = -2 \frac{\sigma_2(2u - u_1 - u_2)\,\sigma_3(2u - u_1 - u_2)}{\sigma_1(2u - u_1 - u_2)\,\sigma(2u - u_1 - u_2)}$$

$$\frac{d}{dx} \log \frac{\varphi}{\sqrt{f}} = -2 \frac{\psi\chi}{\varphi f}$$

oder:

$$\tfrac{1}{4}\varphi \frac{df}{dx} - \tfrac{1}{2} f \frac{d\varphi}{dx} = \psi \cdot \chi$$

die Überschiebung der gegebenen Form f über einen der 3 quadratischen Factoren von T ist gleich dem Produkt der beiden andern.

Die fundamentalen Covarianten können auch als Entwicklungscoefficienten eines und desselben Ausdrucks erhalten werden. Wird nämlich in Gleichung 6) die rechte Seite nach Potenzen von u entwickelt, so erhält man:

$$\frac{\frac{dx}{du} \cdot \left(\frac{dx}{du}\right)_{x = x_0}}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{u^2} + * + \mathfrak{p}(u_1 + u_2) - u\mathfrak{p}'(u_1 + u_2)$$

$$+ u^2 \left\{ \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}''(u_1 + u_2) - \tfrac{1}{20} g_2 \right\} + \cdots$$

oder wenn man x_0 und die Coefficienten von f einführt:

22)
$$\frac{\frac{dx}{du}}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{(f(x_0))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2} \frac{H(x_0)}{(f(x_0))^{\frac{3}{2}}} - u \cdot \frac{T(x_0)}{f(x_0))^2}$$

$$+ u^2 \frac{\frac{3}{4}(H(x_0))^2 - \frac{3}{20} i f(x_0)^2}{(f(x_0))^{5/2}} + \cdots$$

Durch Integration folgt für $\frac{1}{x - x_0}$ eine Entwicklung nach Potenzen von u, deren Coefficienten Covarianten von $f(x_0)$ sind, geteilt durch Potenzen von $(f(x_0))^{\frac{1}{2}}$.

Eine ähnliche Entwicklung ist die folgende, die entweder aus

1) Clebsch § 45, 1.

der vorigen durch Übergang zur Grenze $x_0 = \infty$, oder direkt aus 5) erhalten werden kann:

$$23) \qquad \frac{dx}{dv} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left\{ \frac{1}{v^2} - \frac{1}{2} \frac{H(\infty)}{f(\infty)} - v \frac{T(\infty)}{(f(\infty)^{3/2}} + v^2 \frac{\frac{3}{4}(H(\infty))^2 - \frac{3}{20} i (f(\infty))^2}{(f(\infty))^2} + \cdots \right\}$$

Dabei ist $\frac{H(\infty)}{f(\infty)}$ etc. der Quotient der Leitglieder von H und f; v ist der für die untere Grenze ∞ genommene Integralwert.

Durch Integration erhält man aus 23) eine Entwicklung von x selbst nach Potenzen von v, in welcher, abgesehen von dem constanten Glied, alle Coefficienten rational und ganz (bis auf eine Potenz von $\sqrt{a}$ im Nenner) ausgedrückt sind durch die zwei Invarianten i und j und die drei Halbinvarianten $a_0, a_0 a_2 - a_1^2$ und $a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3$.

Dass die erwähnten Eigenschaften den Coefficienten einer solchen Entwicklung zukommen müssen, soll im folgenden unabhängig von der vorhergehenden direkten Aufstellung der Covarianten gezeigt werden. Jedoch soll sich die Untersuchung sogleich auf Integrale von allgemeinerer Art, beziehungsweise auf binäre Formen beliebiger Ordnung ausdehnen, da die Beschränkung auf den speciellen Fall keine Vereinfachung mit sich bringen würde.

§ 3.

Reihenentwicklungen, deren Coefficienten Covarianten sind.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf Integrale von der Form:

$$24) \qquad u = \int_y^x (f(\xi))^{-\frac{2}{n}} \, d\xi$$

wo unter f eine rationale ganze Function n^{ter} Ordnung:

$$25) \qquad f(\xi) = a_0 \xi^n + \binom{n}{1} a_1 \xi^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 \xi^{n-2} + \cdots + a_n$$

verstanden ist. Werden durch die Substitutionen:

$$26) \qquad \xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}, \; x = \frac{x_1}{x_2}, \; y = \frac{y_1}{y_2}$$

homogene Veränderliche eingeführt, so geht das Integral 24) unter

Benutzung der symbolischen Schreibweise von Aronhold und Clebsch über in:

27) $$u = -\int_{(y)}^{(x)} \frac{(\xi\, d\,\xi)}{(a_\xi^n)^{\frac{2}{n}}}$$

wo als Bezeichnung der Grenzen (x), (y) statt (x_1, x_2), (y_1, y_2) der Einfachheit wegen beibehalten ist. Die Form 27) lässt unmittelbar erkennen, dass das Integral u gegenüber der binären Form a_ξ^n die Eigenschaft einer Covariante besitzt; werden die Variabeln einer beliebigen linearen Substitution unterworfen, so geht u über in das Produkt aus der Substitutionsdeterminante in ein aus den transformirten Coefficienten und Variabeln gebildetes Integral derselben Form Die beiden Variabelnpaare x_1, x_2 und y_1, y_2 erscheinen dabei als cogredient.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen trat eine Entwicklung von $\frac{1}{x - x_0}$ auf. In der hier benutzten Bezeichnung wird man im Interesse der Homogeneität die Frage so formuliren müssen: Es sei verlangt, eine lineare Function von (x), welche für (x) = (y) unendlich gross und an einer beliebigen andern Stelle (x) = (z) unendlich klein wird[1]):

28) $$\eta = \eta(x) = \frac{(xz)}{(xy)}$$

nach Potenzen von u in eine Reihe zu entwickeln. Dabei werde vorausgesetzt, dass die Function a_ξ^n für $(\xi) = (y)$ nicht verschwinde.

Zu diesem Zwecke werde zunächst $\eta(\xi)$ als Integrationsvariable eingeführt; setzt man:

29) $$\left.\begin{matrix}\eta_1 = (\xi z)\\ \eta_2 = (\xi y)\end{matrix}\right\}, \text{ also } \left.\xi_1 = \frac{y_1\eta_1 - z_1\eta_2}{(y\,z)},\quad \xi_2 = \frac{y_2\eta_1 - z_2\eta_2}{(y\,z)}\right\}$$

so hat man:

$$(\xi\, d\,\xi) = -\frac{(\eta\, d\eta)}{(y\,z)};$$

$$a_\xi^n = \frac{(a_1(y_1\eta_1 - z_1\eta_2) + a_2(y_2\eta_1 - z_2\eta_2))^n}{(y\,z)^n} = \frac{(a_y\eta_1 - a_z\eta_2)^n}{(y\,z)^n}$$

---

1) Strenge Consequenz würde hier die Einführung eines Doppelverhältnisses, etwa

$$\frac{(x\,z)\ (t\,y)}{(x\,y)\ (t\,z)}$$

fordern; indess sei es gestattet, zur Vereinfachung der Formeln den Faktor $\frac{(ty)}{(tz)}$ zu unterdrücken.

und damit:

$$30) \qquad u = (yz) \cdot \int_{(\infty)}^{\eta(x)} \frac{(\eta\, d\eta)}{\left((a_y \eta_1 - a_z \eta_2)^n\right)^{\frac{2}{n}}}$$

Um die nachfolgenden Reihenentwicklungen durchzuführen, werde für dieselben $\eta_1 = \eta, \eta_2 = 1, d\eta_2 = 0$ gesetzt, so dass man hat:

$$31) \qquad u = -(yz) \int_{(\infty)}^{\eta(x)} \frac{d\eta}{\left((a_y \eta - a_z)^n\right)^{\frac{2}{n}}}$$

Nun ist der symbolische Ausdruck:

$$(a_y \eta - a_z)^n = a_y^{\,n} \eta^n \left\{ 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^\lambda \cdot \binom{n}{\lambda} \frac{a_y^{\,n-\lambda}\, a_z^{\,\lambda}}{a_y^{\,n}} \eta^{-\lambda} \right\}$$

Wird dies auf die Potenz $-\frac{2}{n}$ nach dem polynomischen Lehrsatz erhoben, und werden in der resultirenden Reihe die Glieder mit gleichen Potenzen von η zusammengezogen und auf gleichen Nenner gebracht, so erhält man:

$$32) \qquad \left((a_y \eta - a_z)^n\right)^{\frac{-2}{n}} = \left(a_y^{\,n}\right)^{\frac{2}{n}} \eta^{-2} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_r\,(y,z)}{\left(a_y^{\,n}\right)^r} \eta^{-r} \right\}$$

wo:

$$33) \qquad A_r(y,z) = \sum (-1)^r \cdot \binom{\frac{2}{n}}{k_1 + k_2 + \ldots k_n} \cdot \frac{(k_1 + k_2 + \ldots k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!} \cdot \prod_{\lambda=0}^{n} \left(\binom{n}{\lambda} a_y^{\,n-\lambda}\, a_z^{\,\lambda} \right)^{k_\lambda}$$

die Summe erstreckt über alle Systeme von Zahlen $k_0, k_1, k_2 \ldots k_n$ aus der Reihe 0, 1, 2, 3 ···· in inf., welche den Bedingungen genügen:[1])

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = r;$$
$$k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_n = r.$$

---

1) Es ist nämlich $-(k_1 + 2k_2 + \ldots n k_n)$ der Exponent der Potenz von η, mit welcher ein Produkt $(a_y^{n-1} a_z)^{k_1} \cdot (a_y^{n-2} a_z)^{k_2} \ldots$ in der Reihe multiplicirt ist, und $(k_1 + k_2 + \ldots k_n)$ der Exponent von $a_y^{\,n}$ im Nenner; soll das Glied auf den Nenner $(a_y^{\,n})^r$ gebracht werden, so ist k_0 aus der zweiten der obigen Gleichungen zu bestimmen.

Es ist demnach A_r eine Covariante der binären Form a_y^n, mit zwei Reihen cogredienter Veränderlicher, von der Ordnung $(n-1)r$ in den y, von der Ordnung r in den z und vom Grade r in den Coefficienten a.

Durch Integration folgt aus 32):

$$34) \qquad u \cdot \frac{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}}{(yz)} = \eta^{-1} \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+1} \frac{A_r(y,z)}{(a_y^n)^r} \eta^{-r} \right\}$$

Aus dieser Reihe kann nun umgekehrt eine Entwicklung von η nach steigenden Potenzen von u erhalten werden, welche in der Form geschrieben werden möge:

$$35) \qquad \eta = u^{-1} \frac{(yz)}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_p(y,z)}{(yz)^p \cdot (a_y^n)^{p\left(1-\frac{2}{n}\right)}} \cdot u^p \right\}$$

wo die Coefficienten B_p noch zu bestimmen sind. Man kann für dieselben Recursionsformeln erhalten, wenn man aus 34) Entwicklungen für die einzelnen Potenzen von u ableitet, diese in 35) einsetzt und in der so entstehenden Reihe den Coefficienten von η gleich 1, die Coefficienten aller andern Potenzen von η aber gleich Null setzt. Dabei erhält man:

$$36) \qquad \frac{(yz)}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}} \cdot u = \eta \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{s,-1}(y,z)}{(a_y^n)^s} \eta^{-s} \right\}$$

wo:

$$A_{s,-1}(y,z) = \sum \binom{-1}{s_1 + s_2 + \cdots} \frac{(s_1 + s_2 + \cdots)!}{s_1!\, s_2! \cdots} \left(\frac{A_1}{2}\right)^{s_1} \cdot \left(\frac{A_2}{3}\right)^{s_2} \cdot \left(\frac{A_3}{4}\right)^{s_3} \cdots;$$

die Summe erstreckt über alle Systeme von Zahlen $s_1, s_2, s_3 \cdots$ aus der Reihe 0, 1, 2 ··· welche der Bedingung genügen:

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots = s.$$

Ebenso erhält man für $p = 2, 3, 4 \cdots$ in inf.:

$$37) \qquad \frac{(a_y^n)^{(p-1)\frac{2}{n}}}{(yz)^{p-1}} u^{p-1} = \eta^{-p+1} \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{s,p}(y,z)}{(a_y^n)^s} \eta^{-s} \right\}$$

wo:

$$A_{s,p}(y,z) = \sum \binom{p}{s_1 + s_2 + \cdots} \frac{(s_1 + s_2 + \cdots)!}{s_1!\, s_2! \cdots} \left(\frac{A_1}{2}\right)^{s_1} \cdot \left(\frac{A_2}{3}\right)^{s_2} \cdot \left(\frac{A_3}{4}\right)^{s_3} \cdots$$

die Summe erstreckt über alle Systeme von Zahlen s_1, s_2, $s_3 \cdots$ aus der Reihe 0, 1, 2 $\cdots$, welche den Bedingungen genügen:

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \cdots = s;$$
$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots \leqq p - 1.$$

Die Formeln 36) und 37) zeigen, dass $A_{s,-1}$ wie $A_{s,p}$ für $p = 2, 3 \cdots$ Covarianten von a_y^n sind, von der Ordnung $(n-1)s$ in den y, von der Ordnung s in den z und vom Grade s in den Coefficienten a.

Werden nun 36) und 37) in 35) eingesetzt, so wird der Coefficient von η^{-q+1} $(q = 3, 4, 5 \cdots$ in inf.) gleich:

$$\frac{A_{q,-1}}{(a_y^n)^q} + \frac{A_{q-2}}{(q-1)(a_y^n)^{q-2}} \cdot \frac{B_2}{(a_y^n)^2} + \sum_{p=3}^{q-1} \frac{A_{q-p,p}}{(a_y^n)^{q-p}} \cdot \frac{B_p}{(a_y^n)^p} + \frac{B_q}{(a_y^n)^q}$$

so dass die Recursionsformel gewonnen ist:

38) $$B_q = -A_{q,-1} - \frac{1}{q-1} A_{q-2} B_2 - \sum_{p=3}^{q-1} A_{q-p,p} B_p, \quad q = 3, 4 \cdots \text{ in inf.}$$

Die Vergleichung des Coefficienten von η^{-1} und des absoluten Gliedes liefert hiezu:

39) $$B_1 = -A_{1,-1}$$
$$B_2 = -A_{2,-1}$$

Diese Formeln zeigen, dass den B_p folgende Eigenschaften zukommen: sie sind Covarianten von a_y^n, von der Ordnung $(n-1)p$ in den y, von der Ordnung p in den z, vom Grade p in den Coefficienten a. Denn gilt dies für B_1, $B_2 \cdots B_{q-1}$, so gilt es nach 38), mit Rücksicht auf die Eigenschaften der A auch für B_q; und die Formeln 39) zeigen die Richtigkeit der Behauptung für B_1 und B_2.

Um weitere Eigenschaften der B_p abzuleiten, werde Gleichung 35) nach u differentiirt, bei constanten y und z. Wegen:

$$(x\,dx) = -\left(a_x^n\right)^{\frac{2}{n}} du$$

und:

$$(xz)(y\,dx) - (xy)(z\,dx) = (yz)(x\,dx)\ ^1)$$

erhält man dabei nach Division mit $(y\,z)\,du$:

39a) $$\frac{\left(a_x^n\right)^{\frac{2}{n}}}{(xy)^2} = \frac{u^{-2}}{\left(a_y^n\right)^{\frac{2}{n}}} \left\{ 1 - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p-1} \frac{B_p(y,z)}{(yz) \cdot \left(a_y^n\right)^{p\left(1-\frac{2}{n}\right)}} \cdot u^p \right\}$$

1) Clebsch, § 15, I.

Hier kommt links z nicht mehr vor; rechts ist u von z unabhängig, also müssen es auch seine Coefficienten sein. Demnach ist:

$$B_p(y,z) = (yz)^p \cdot C_p(y), \quad p = 2, 3, \cdots \text{in inf.}$$

also:

$$40) \quad \eta = \frac{(yz)}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}} \cdot \frac{1}{u} \left\{ 1 + \frac{B_1(y,z)}{(yz)\cdot(a_y^n)^{1-\frac{2}{n}}} u + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{C_p(y)}{(a_y^n)^{p\left(1-\frac{2}{n}\right)}} u^p \right\}$$

Dabei ist jetzt $C_p(y)$ eine Covariante von a_y^n mit nur einer Reihe von Veränderlichen, von der Ordnung $(n-2)p$ und vom Grade p.

Für B_1 und C_2 mögen noch die ausgerechneten Werte angegeben werden; man hat:

$$A_1(y,z) = \tfrac{2}{n} \cdot n \cdot a_y^{n-1} a_z ;$$

$$A_2(y,z) = \binom{-\frac{2}{n}}{2} n^2 \cdot (a_y^{n-1} a_z)^2 - \tfrac{2}{n} \cdot \binom{n}{2} \cdot a_y^n \cdot b_y^{n-2} b_z^2$$

$$= (n+2)\, a_y^{n-1} a_z\, b_y^{n-1} b_z - (n-1)\, a_y^n \cdot b_y^{n-2} b_z^2 ;$$

$$41) \quad B_1 = -A_{1,-1} = \tfrac{1}{2} A_1 = a_y^{n-1} a_z ;$$

$$B_2 = -A_{2,-1} = -\frac{A_1^2}{4} + \frac{A_2}{3} = \frac{n-1}{3} a_y^{n-1} b_y^{n-2} b_z \left\{ a_z b_y - b_z a_y \right\}$$

$$= -\frac{n-1}{3}(ab)(yz) a_y^{n-1} b_y^{n-2} b_z = -\frac{n-1}{6}(yz)^2 \cdot (ab)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2};$$

also:

$$42) \qquad C_2 = -\frac{n-1}{6}(ab)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} .$$

Um endlich noch für die höheren C Recursionsformeln abzuleiten, welche die A entbehrlich machen, werde ausgegangen von der Gleichung:

$$43) \quad d_y(\eta \cdot (yz)) = \frac{(xz)}{(xy)^2} \left\{ -(xy)(z\,dy) - (yz)\cdot(x\,dy) \right\} = -\frac{(xz)^2}{(xy)^2}(y\,dy).$$

Dabei ist x in Bezug auf die Differentiation als Constante betrachtet; unter dieser Voraussetzung ist aber:

$$(y\,dy) = \left(a_y^n\right)^{\frac{2}{n}} du .$$

Die Ausführung der Differentiation an den einzelnen Gliedern der Reihe liefert:

$$d_y \frac{(yz)^2}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}} = -\frac{2(yz)(z\,dy)}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}}} - \frac{2(yz)^2 \cdot a_y^{n-1} a_{dy}}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}+1}} = -\frac{2(yz)\cdot a_y^{n-1} a_z}{(a_y^n)^{\frac{2}{n}+1}} \cdot (y\,dy);$$

$$d_y \frac{(yz)\cdot a_y^{n-1} a_z}{a_y^n} = \frac{1}{(a_y^n)^2}\Big\{ -a_y^n \cdot b_y^{n-1} b_z \cdot (z\,dy) + (n-1)\cdot(yz)\cdot a_y^n \cdot b_y^{n-2} b_z b_{dy} - n\cdot(yz)\cdot b_y^{n-1} b_z \cdot a_y^{n-1} a_{dy}\Big\}$$

$$= \frac{(y\,dy)}{(a_y^n)^2}\Big\{ -a_y^{n-1} a_z \cdot b_y^{n-1} b_z + (n-1)\cdot(yz)\cdot(ab) a_y^{n-1} b_y^{n-2} b_z\Big\}$$

$$= \frac{(y\,dy)}{(a_y^n)^2}\left\{ -a_y^{n-1} a_z \cdot b_y^{n-1} b_z + \frac{n-1}{2}\cdot(yz)^2\cdot(ab)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2}\right\};$$

und allgemein, wenn symbolisch

$$C_p(y) = \gamma_y^{(n-2)p}$$

gesetzt wird:

$$d_y \frac{(yz)^2 \gamma_y^{(n-2)p}}{\left(a_y^n\right)^{p-\frac{2}{n}(p-1)}} = \frac{(yz)}{\left(a_y^n\right)^{p+1-\frac{2}{n}(p-1)}}\Big\{ -2\cdot a_y^n \gamma_y^{(n-2)p}(z\,dy) + (n-2)p\cdot(yz)\cdot a_y^n \cdot \gamma_y^{(n-2)p-1}\cdot\gamma_{dy} - (np-2p+2)\cdot(yz)\cdot\gamma_y^{(n-2)p}\cdot a_y^{n-1} a_{dy}\Big\}$$

$$= \frac{(yz)}{\left(a_y^n\right)^{p+1-\frac{2}{n}(p-1)}}\Big\{ -2\gamma_y^{(n-2)p}\cdot a_y^{n-1}\left(a_y(z\,dy) + (yz)\,a_{dy}\right) + (n-2)p\cdot(yz)\cdot a_y^{n-1}\gamma_y^{(n-2)p-1}\cdot(a_y\gamma_{dy} - \gamma_y a_{dy})\Big\}$$

$$= \frac{(yz)\,(y\,dy)}{\left(a_y^n\right)^{p+1-\frac{2}{n}(p-1)}}\Big\{ -2a_y^{n-1} a_z \cdot C_p(y) + (n-2)p\cdot(yz) H_{p+1}(y)\Big\}$$

wo:

44) $$H_{p+1}(y) = (a\gamma)\, a_y^{n-1}\gamma_y^{(n-2)p-1}$$

die erste Ueberschiebung der gegebenen Form f über C_p bedeutet. Andererseits erhält man:

$$\eta^2 = \frac{(yz)^2}{\left(a_y^n\right)^{\frac{4}{n}}}\frac{1}{u^2}\left\{ 1 + \frac{2B_1(y,z)}{(yz)\left(a_y^n\right)^{1-\frac{2}{n}}} u + 2\sum_{p=2}^{\infty}\frac{C_p(y)}{\left(a_y^n\right)^{p\left(1-\frac{2}{n}\right)}} u^p + \frac{B_1^2(y,z)}{(yz)^2\left(a_y^n\right)^{2-\frac{4}{n}}} u^2 + 2\sum_{p=2}^{\infty}\frac{B_1(y,z)\cdot C_p(y)}{(yz)\left(a_y^n\right)^{(p+1)\left(1-\frac{2}{n}\right)}} u^{p+1} + \sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{C_p(y)\cdot C_q(y)}{\left(a_y^n\right)^{(p+q)\left(1-\frac{2}{n}\right)}} u^{p+q}\right\}.$$

Werden alle diese Entwicklungen in 43) eingesetzt, so liefert die Vergleichung der Coefficienten von u^{p-1} für $p = 2, 3\cdots$ *in inf.*[1]) nach Entfernung des gemeinsamen Faktors:

1) Die Vergleichung der Coefficienten von u^{-2}, u^{-1}, u^0, u^1 liefert teils Identitäten, teils Bestätigungen der Formeln 41) und 42).

$$(yz)\,(a_y^n)^{-p\left(1-\frac{2}{n}\right)-1}$$

die gesuchte Recursionsformel:

$$-2\,C_p(y)\cdot a_y^{n-1}\,a_z+(n-2)\,p\cdot(yz)\cdot H_{p+1}(y)+p\cdot(yz)\cdot C_{p+1}(y)=$$

$$-2(yz)\,C_{p+1}(y)-2B_1(y,z)\,C_p(y)-(yz)\sum_{\lambda=2}^{p-1}C_\lambda(y)\cdot C_{p+1-\lambda}(y)$$

oder vereinfacht:

$$45)\quad C_{p+1}(y)=-\frac{1}{p+2}\left\{(n-2)\,p\cdot H_{p+1}(y)+\sum_{\lambda=2}^{p-1}C_\lambda(y)\cdot C_{p+1-\lambda}(y)\right\}.$$

Speciell ist also:

$$C_3=-\frac{n-2}{2}H_3;$$

$$C_4=-\tfrac{1}{5}\left\{3(n-2)\,H_4+C_2^2\right\};$$

$$C_5=-\tfrac{1}{6}\left\{4(n-2)\,H_5+2\,C_2\,C_3\right\};$$

$$C_6=-\tfrac{1}{7}\left\{5(n-2)\,H_6+2\,C_2\,C_4+C_3^2\right\};\ \text{u. s. w.}$$

Das Resultat der Entwickelungen dieses Paragraphen ist also:

Wird für ein Integral der vorgelegten Form eine lineare Function der oberen Grenze, welche beim Zusammenfallen beider Grenzen unendlich gross wird, nach steigenden Potenzen des Integralwerts entwickelt, so treten in den Coefficienten Covarianten der gegebenen binären Form n^{ter} Ordnung auf, deren Ordnung das $(n-2)$ fache ihres Grades, deren „Index“ [1]) also ihrem Grade gleich ist. Die erste dieser Covarianten ist die Hesse'sche H, die zweite deren erste Ueberschiebung über die gegebene Form, also die gewöhnlich mit T bezeichnete Covariante; allgemein die $(p+1)^{te}$ gleich der ersten Ueberschiebung der p^{ten} über die gegebene Form, plus einer rationalen ganzen Function der $p-1$ vorhergehenden.

Die letzten Formeln des vorigen Paragraphen geben einen speciellen Fall dieses Satzes; die dort entwickelte Function:

$$\frac{\frac{dx}{du}}{(x-x_0)^2}$$

entspricht nämlich der hier auftretenden (Formel 39a):

$$\frac{(x\,dx)}{(xy)^2}.$$

1) Clebsch § 16. Faà de Bruno, binäre Formen, deutsch von Walter, § 14 art. 2.

§ 4.
Die Covarianten der cubischen Form, ausgedrückt durch elliptische Functionen.

Von den Formeln des vorigen Paragraphen soll noch Gebrauch gemacht werden, um die Covarianten der cubischen Form in analoger Weise, wie es § 2 für die biquadratischen geschehen ist, als elliptische Functionen eines zugehörigen Integralwerts auszudrücken. Das Integral:

$$46) \qquad u = \int_{(y)}^{(x)} \frac{(\xi\, d\xi)}{(a_\xi^3)^{\frac{2}{3}}} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{(f(\xi))^{\frac{2}{3}}}$$

ist nämlich, wie schon Legendre[1]) gezeigt hat, ein elliptisches; und zwar führt es auf diejenigen elliptischen Functionen, welche complexe Multiplication mit einer dritten Einheitswurzel zulassen[2]). Die Curve (der Kürze wegen sei hier diese geometrische Ausdrucksweise gestattet):

$$\eta^3 = f(\xi)$$

hat nämlich die Axe $\eta = 0$ zu einer Wendepunktslinie, und die drei zugehörigen Wendetangenten — das Produkt ihrer Gleichungen ist $f(\xi) = 0$ — sind zur Axe $\xi = 0$ parallel[3]). Wird die Wendepunktslinie zur Seite $x_1 = 0$, eine der Wendetangenten zur Seite $x_3 = 0$, die zugehörige harmonische Polare zur Seite $x_2 = 0$ eines Coordinatendreiecks gewählt, so lautet bei geeigneter Bestimmung des Einheitspunktes die Gleichung der Curve in diesen Coordinaten:

$$4\, x_1^3 = x_3\,(x_2^2 + g_3\, x_3^2),$$

und man erhält die neuen Coordinaten als elliptische Functionen eines Parameters u ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{p}(\lambda u - u_0\,;\, 0, g_3)\,; \\ x_2 &= \mathfrak{p}'(\lambda u - u_0\,;\, 0, g_3)\,; \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

also die alten Coordinaten:

$$47) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha\, \mathfrak{p}'(\lambda u - u_0) + \beta}{\gamma\, \mathfrak{p}'(\lambda u - u_0) + \delta}\,; \\ \eta &= \frac{\mathfrak{p}(\lambda u - u_0)}{\gamma\, \mathfrak{p}'(\lambda u - u_0) + \delta}\,. \end{aligned}$$

1) Enneper, elliptische Functionen, Note I, III.

2) Vgl. hierüber Röthig, über einige Gattungen elliptischer Integrale, Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 56, p. 197 ff.

3) Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, herausgeg. von Lindemann, p. 502; 579; 602.

Dabei sind α, β, γ, δ und g_3 bestimmte Functionen der Coefficienten a, dagegen λ und u_0 noch verfügbare Constanten. Mit Rücksicht auf $\mathfrak{p}'' u = 6\mathfrak{p}^2 u$ erhält man aus 47):

$$\frac{d\xi}{\eta^2} = 6\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma)\,du;$$

also stimmt der hier benutzte Parameter u in der Tat mit dem Integralwert überein, wenn λ und u_0 passend gewählt werden. Doch kann auch — und dies soll im folgenden geschehen — $\lambda = 1$ vorausgesetzt werden, wenn g_3 entsprechend geändert wird[1]).

Die Bestimmung der eingeführten Constanten α, β, γ, δ, u_0 würde die Auflösung der Gleichung $f(\xi) = 0$ erfordern; es sollen daher statt derselben andere eingeführt werden, für welche das nicht der Fall ist. Solche sind — ausser x_0 — drei nicht nur um Perioden verschiedene Werte des bis $x = \infty$ erstreckten Integrals, die mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet werden mögen. Diese sind jedoch nicht von einander unabhängig; denn die Stellen, an welchen die Function $\mathfrak{p}'(u; 0, g_3)$ denselben Wert annimmt, gehen durch Multiplication mit dritten Einheitswurzeln auseinander hervor. Dies liefert — abgesehen von Vielfachen der Perioden:

$$u_2 - u_0 = \varepsilon(u_1 - u_0);$$
$$u_3 - u_0 = \varepsilon^2(u_1 - u_0);$$

also die Relation zwischen u_1, u_2, u_3:

52) $$u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^2 u_3 = 0$$

und den Ausdruck von u_0 durch die neuen Hilfsgrössen:

53) $$u_0 = \tfrac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3).$$

Wird noch

54) $$w = \tfrac{1}{3}(u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon u_3)$$

gesetzt, so ist:

55) $$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + w; \\ u_2 &= u_0 + \varepsilon w; \\ u_3 &= u_0 + \varepsilon^2 w. \end{aligned}$$

Von den Stellen, an welchen $x - x_0 = 0$ wird, ist $u = 0$ bekannt; die beiden andern v_1, v_2 folgen aus den Gleichungen:

$$0 + v_1 + v_2 = u_1 + u_2 + u_3\ ^2),$$
$$0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 = 0\ ^3),$$

1) Weierstrass-Schwarz, art. 9, 5.

2) l. c. art. 13, 2.

3) Analog wie 52) abzuleiten.

nämlich:

$$56) \qquad \begin{aligned} v_1 &= (1-\varepsilon)\,u_0 = i\,\varepsilon^2\,u_0\sqrt{3} \\ v_2 &= (1-\varepsilon^2)\,u_0 = -i\,\varepsilon\,u_0\sqrt{3} \end{aligned}$$

Somit kommt:

$$57) \qquad x - x_0 = A\,\frac{\sigma u\,\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u-u_3)};$$

es wird sich zeigen, dass die Bestimmung des Faktors A nicht erforderlich ist. An der Stelle $u = u_1$ wird der Ausdruck 57) unendlich gross wie:

$$\frac{1}{u-u_1}\cdot A\cdot\frac{\sigma(u_0+w)\,\sigma(u_0+\varepsilon w)\,\sigma(u_0+\varepsilon^2 w)}{\sigma(w-\varepsilon w)\,\sigma(w-\varepsilon^2 w)}$$

$$= -\frac{1}{u-u_1}\,A\cdot\frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}{\sigma^2(i\,w\sqrt{3})};$$

an der Stelle $u = u_0 + \varepsilon w$ wie:

$$\frac{1}{u-u_2}\,A\cdot\frac{\sigma(u_0+\varepsilon w)\,\sigma(\varepsilon u_0+\varepsilon w)\,\sigma(\varepsilon^2 u_0+\varepsilon w)}{\sigma(\varepsilon w-w)\,\sigma(\varepsilon w-\varepsilon^2 w)}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{u-u_2}\cdot A\cdot\frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}{\sigma^2(i\,w\sqrt{3})};$$

an der Stelle $u = u_0 + \varepsilon^2 w$ wie:

$$-\frac{\varepsilon^2}{u-u_3}\cdot A\cdot\frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}{\sigma^2(i\,w\sqrt{3})}.$$

Also kann statt 57) auch geschrieben werden:

$$58) \quad x - x_0 = -A\,\frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}{\sigma^2(i\,w\sqrt{3})}\cdot\left\{\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + \varepsilon\,\frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} + \varepsilon^2\,\frac{\sigma'(u-u_3)}{\sigma(u-u_3)}\right\}$$

daraus folgt:

$$\frac{dx}{du} = A\,\frac{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}{\sigma^2(i\,w\sqrt{3})}\left\{\wp(u-u_1) + \varepsilon\,\wp(u-u_2) + \varepsilon^2\,\wp(u-u_3)\right\}$$

Die Klammer kann umgeformt werden in:[1])

$$59) \quad \left\{6\,\frac{\wp(u-u_0)\cdot\wp w}{\wp'(u-u_0)-\wp' w)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sigma(i\sqrt{3}\,(u-u_0))\,\sigma(i\sqrt{3}\,w)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u-u_3)}\right\}^2$$

---

1) Die Bestimmung der Null- und Unendlichkeitsstellen zeigt die Richtigkeit der Formeln:

$$\wp' u - \wp' v = -2\,\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-\varepsilon v)\,\sigma(u-\varepsilon^2 v)}{\sigma^3 u\,\sigma^3 v};$$

$$\wp u = -\frac{i}{\sqrt{3}}\,\frac{\sigma(i\,u\sqrt{3})}{\sigma^3 u} \qquad (g_2 = 0).$$

also folgt:

$$60) \qquad \frac{dx}{du} = A \cdot \frac{\sigma^2(i\sqrt{3}(u-u_0))\,\sigma u_1 \cdot \sigma u_2 \cdot \sigma u_3}{\sigma^2(u-u_1)\,\sigma^2(u-u_2)\,\sigma^2(u-u_3)}$$

und:

$$61) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)_{u=0} = A\,\frac{\sigma^2(iu_0\sqrt{3})}{\sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma u_3}.$$

Aus 57), 60) und 61) werde nun der Ausdruck zusammengesetzt, dessen Entwicklung die gesuchten Ausdrücke der Covarianten liefert:[1])

$$\frac{\frac{dx}{du}\cdot\left(\frac{dx}{du}\right)_{u=0}}{(x-x_0)^2} = \frac{\sigma^2(i\sqrt{3}(u-u_0))\,\sigma^2(i\sqrt{3}u_0)}{\sigma^2 u\,\sigma^2(u-v_1)\,\sigma^2(u-v_2)}$$

$$= \wp u + \varepsilon\wp(u - i\varepsilon^2\sqrt{3}u_0) + \varepsilon^2\wp(u + i\varepsilon\sqrt{3}u_0)$$

$$= \frac{1}{u^2} + 2\wp(i\sqrt{3}u_0) + i\sqrt{3}\,\wp'(i\sqrt{3}u_0)\cdot u + \cdots$$

Die Vergleichung dieser Entwicklung mit den Formeln des § 3 gibt nun:[2])

$$62) \qquad \frac{\Delta(x_0)}{(f(x_0))^{\frac{3}{3}}} = 6\wp(iu_0\sqrt{3});$$

$$63) \qquad \frac{Q(x_0)}{(f(x_0))} = 3\sqrt{3}\,i\wp'(iu_0\sqrt{3}).$$

Die Vergleichung der „syzygetischen" Relation zwischen den fundamentalen Covarianten der cubischen Form:[3])

$$Q^2 = -\tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{2}Rf^2$$

und der Differentialgleichung unserer Function $\wp(iu_0\sqrt{3})$:

$$\wp'^2(iu_0\sqrt{3}) = 4\wp^3(iu_0\sqrt{3}) - g_3$$

gibt für die Invariante R:

$$64) \qquad R = -54\,g_3.$$

Die Formeln 62), 63) und 64) leisten für die cubische Form dasselbe, wie 14)—17), für die biquadratische; insbesondere steht die Formel (vgl. pag. 24 Randnote):

---

1) vgl. die Ableitung von 60) aus 59).

2) Um von den Formeln für x_0 auf diejenigen für x zu kommen, ist nur u_0 durch $u - u_0$ zu ersetzen.

3) Clebsch § 35, 7.

$$\sigma(\mathrm{i}u\sqrt{3}) = \mathrm{i}\sqrt{3}\,\frac{\sigma u\,\sigma\left(u - \frac{2\omega_1}{3} - \frac{4\omega_3}{3}\right)\sigma\left(u - \frac{4\omega_1}{3} - \frac{2\omega_3}{3}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega_1}{3} + \frac{4\omega_3}{3}\right)\sigma\left(\frac{4\omega_1}{3} + \frac{2\omega_3}{3}\right)}$$

(für $g_2 = 0$)

zu der Faktorenzerlegung der ersteren in derselben Beziehung, wie die Formel:

$$\sigma(2u) = 2\,\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u$$

zur Faktorenzerlegung der letzteren.